ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος και το $\sigma(D^{-1}(L+U)) \in (-1,1)$ και έστω $\beta = \rho(D^{-1}(L+U)) < 1$. Τότε η βέλτιστη τιμή του ω των SOR μεθόδων είναι $\omega_\beta = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\beta^2}}$, β: φασμ. ακτ. και ισχύει:

$\rho(\mathcal{L}_\omega) > \rho(\mathcal{L}_{\omega_\beta}) = \omega_\beta - 1$, $\forall \omega \neq \omega_\beta$.

και η μέθοδος συγκλίνει για κάθε $\omega \in (0,2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (SOR)

Άσκηση 7 (σελ. 101)

Έστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

α) Δικυκλικός - Συνεπώς διατεταγμένος

Αρκεί για να είναι δικυκλικός να επιλέξουμε τη μετάθεση:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

και για το συνεπώς διατεταγμένος παίρνουμε το Θεώρημα.

β) Η μέθοδος Jacobi συγκλίνει;

Είναι θετ. ορισμένος, δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος έτσι από το Θεώρημα (Ostrovsky-Reich-Varga) η μέθοδος (SOR) συγκλίνει για κάθε $\omega \in (0,2)$

Επομένως η Gauss-Seidel συγκλίνει αφού $\omega = 1 \in (0,2)$

Τώρα, επειδή ο πίνακας είναι δικυκλικός και συνεπώς διατεταγμένος θα ισχύει:

$\rho(T_{GS}) = \rho(T_J)^2$, επομένως αφού $\rho(T_{GS}) < 1 \Leftrightarrow \rho(T_J) < 1$

άρα η Jacobi συγκλίνει

$$T_J = D^{-1}(L+U) = \ldots = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \det(T_J) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{2}\right)$$

Ιδιοτιμές $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\lambda_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Έτσι, $\rho(T_J) = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, $\rho(T_J) = \beta$

Απο θεώρημα (προηγούμενο μάθημα)

$$\rho(T_{GS}) = \rho(T_J)^2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\omega_\beta = \frac{2}{1+\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2(1-\sqrt{2}/2)}{1/2} = 4\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4-2\sqrt{2} \simeq 1.1716$$

Η φασματική ακτίνα της SOR στο ω_β.

$$P(\mathcal{L}_{\omega_\beta}) = \omega_\beta - 1 = 3-2\sqrt{2} \simeq 0.1716.$$

Έχουμε βελτίωση της φασματικής ακτίνας.

γ) Να γίνει μια επανάληψη της SOR μεθόδου με $\omega = 1.25$ και

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ο αλγόριθμος είναι

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)x_i^{(k)} + \omega\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)\Big/ a_{ii},$$

Έτσι,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= -\frac{1}{4}x_1^{(k)} + \frac{5}{8}\left(2 + x_2^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)} &= -\frac{1}{4}x_2^{(k)} + \frac{5}{8}\left(1 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)} &= -\frac{1}{4}x_3^{(k)} + \frac{5}{8}\left(0 + x_2^{(k+1)}\right) \end{aligned}\right| \quad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Άρα,

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} + \frac{5}{8}(2+1) = \frac{13}{8} \\ -\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\left(1+\frac{13}{8}+1\right) = \frac{129}{64} \\ -\frac{1}{4} + \frac{5}{8}\cdot\frac{129}{64} = \frac{517}{512} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{13}{8} \simeq 2 \\ \frac{129}{64} \simeq 2 \\ \frac{517}{512} \simeq 1 \end{bmatrix}$$

ΜΠΛΟΚ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ (BLOCK)

Θεωρούμε τον block διαχωρισμό του πίνακα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & A_{pp} \end{bmatrix} \text{ αντίστοιχα } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

όπου $A_{ii} \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $b_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $\sum\limits^{p} n_i = n$, A_{ii} αντιστρέψιμος. Τότε, κατασκευάζουμε όλες τις επαναληπτικές μεθόδους με βάση τον block-διαχωρισμό.

(Block-Jacobi)

$$x_i^{(k+1)} = \Big(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\Big)/a_{ii}, \quad i = 1(1)n, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

Άρα, η Block-Jacobi είναι:

$$A_{ii} x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} A_{ij}\, x_j^{(k)}, \quad i = 1(1)p, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

$$T_{BJ} = D^{-1}\cdot(L+U) = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & & & \\ & A_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{pp}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -A_{12} & \cdots & -A_{1p} \\ A_{21} & 0 & \cdots & -A_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Block διαχωρισμός ουσιαστικά επιταχύνει τη σύγκλιση!!!

Παράδειγμα.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 2 \end{array}\right]$$

ο A είναι block διαγώνιος και αυστηρώς διατεταγμένος διότι κάθε 2x2 πίνακας είναι διαγώνιος και αυστηρώς διατεταγμ.

Προσοχή ο αρχικός πίνακας δεν είναι διαγώνιος και αυστηρώς διατεταγμένος. Τώρα, εξετάζουμε τη σύγκλιση

$$T_{BJ} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε την απαλοιφή του Gauss

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 & 0 & 1 \\ & & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

$$A_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$T_{BJ} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(T_{BJ}) = -\lambda\left(\lambda^2 - \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \lambda_1 = 0 \text{ και } \lambda_{2,3} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άρα, $\rho(T_{BJ}) = \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \rho(T_J)$

(Block Gauss-sheidel)

Αμέσως, είναι:

$$A_{ii}^{-1} \cdot x_i^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{p} A_{ij}\, x_j^{(k)}, \quad i=1(1)p,\ k=0,1,2,\dots \quad x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$$

Όμοια,

$$\rho(T_{BGS}) = \rho(T_{BJ})^2 = \frac{1}{3} \text{ για το παράδειγμα.}$$

Επίσης, $\omega_b = \dfrac{2}{1+\sqrt{1-\beta^2}} = \dfrac{2}{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}$ ← στο παράδειγμα

και $\omega_b = 6 - 2\sqrt{6} \simeq 1.101$

Το αντίστοιχο:

$\rho(\mathcal{L}_\omega) = \omega_b - 1 = 5 - 2\sqrt{6} \simeq 0.101$ σημαντική βελτίωση της SOR.

ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ (ΝΕΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ)

Για τη λύση του $Ax=b$ όπου A συμμετρικός και θετικά ορισμένος επιλέγουμε συνάρτηση $f(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ C^2 τέτοια ώστε η λύση $x^* = A^{-1} \cdot b$ του $Ax=b$ να ελαχιστοποιεί την f και εφαρμόζουμε μεθόδους ελαχιστοποίησης. Κατασκευάζουμε την ακολουθία $\{x^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ ώστε να συγκλίνει στο ελάχιστο της f. Αν είμαστε στο $x \in \mathbb{R}^n$, επιλέγουμε μία κατεύθυνση $u \in \mathbb{R}^n$ και παίρνουμε το επόμενο σημείο $x + \alpha u$, ώστε να ελαττώνεται η τιμή της f. Έπειτα, θεωρούμε τη συνάρτηση g έτσι

$g(\alpha) = f(x+\alpha u)$. Αναπτύσσουμε κατά Taylor την $g(\alpha)$ στο 0. Έτσι,

$$g(\alpha) = g(0) + \alpha g'(0) + O(\alpha^2) =$$

, O: μια ποσότητα που εξαρτάται από το α^2.

$$= f(x) + f'(x+\alpha u)\Big|_{\alpha=0}\cdot \alpha + O(\alpha^2) =$$

$$= f(x) + \alpha \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{d\alpha} + O(\alpha^2) =$$

$$= f(x) + \alpha\cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i + O(\alpha^2) =$$

$$= f(x) + \alpha\,(\nabla f, u) + O(\alpha^2).$$

Έστω $\alpha > 0$ και επιδιώκουμε την ελαχιστοποίηση της ποσότητας $(\nabla f, u)$.

$(\nabla f, u) = \|\nabla f\|_2 \cdot \|u\|_2 \cdot \cos(\widehat{\nabla f, u})$

Για να "πάμε" στο ελάχιστο η γωνία πρέπει να είναι παραπληρωματική. Για $\theta = \pi$, παίρνουμε την μικρότερη δυνατή ποσότητα του $(\nabla f, u)$, που σημαίνει ότι $u = -\nabla f$ ($u \uparrow\downarrow \nabla f$) η βέλτιστη κλίση- (πάει προς τα κάτω με μεγαλύτερη ταχύτητα)

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (b, x).$$

Έστω $x^* = A^{-1} b$ η λύση του $Ax = b$
τότε $x = x^* + y$ έτσι:

$$f(x) = f(x^*+y) = \frac{1}{2}(A(x^*+y), x^*+y) - (b, x^*+y) =$$

$$= \frac{1}{2}(Ax^*, x^*) + \frac{1}{2}(Ax^*, y) + \frac{1}{2}(Ay, x^*) + \frac{1}{2}(Ay, y) - (b, x^*) - (b, y) =$$

[όπου A συμμετρικός και θετ. ορισμένος]

$$= f(x^*) + (\overset{0}{\cancel{Ax^* - b}}, y) + \frac{1}{2}(Ay, y) = f(x^*) + \frac{1}{2}(Ay, y)$$

όπου $f(x) > f(x^*)$, $\forall x \neq x^*$ ελάχιστο

Με άλλο τρόπο να βρούμε το ελάχιστο.

Το ελάχιστο βρίσκεται στα κρίσιμα σημεία της f

$\nabla f = 0$ όπου $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{2}(Ax, x) - \frac{\partial}{\partial x_k}(b, x) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{i=1}^{n} b_i x_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\cdot\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_k}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j - b_k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ik} - b_k = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - b_k$$

$$\nabla f = 0 = \begin{bmatrix} \sum_1^n a_{1j} x_j - b_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_1^n a_{nj} x_j - b_n \end{bmatrix} = Ax - b \Leftrightarrow x \text{ λύση του συστήματος}$$

Το ελάχιστο προκύπτει από τον Εσσιανό πίνακα

$H = A$ θετ. ορισμένος $\Rightarrow$ άρα έχουμε ελάχιστο

$u = r = -\nabla f = b - Ax$